

含无损传输线的约瑟夫森结电磁系统中的分岔与混沌

张立森, 蔡 理, 冯朝文

(空军工程大学理学院, 陕西西安 710051)

摘 要: 建立了含无损传输线的约瑟夫森结电磁系统左端点处电压正向行波分量的一维 Poincaré 映射模型, 运用非线性动力学理论分析了映射定点的稳定性. 通过数值计算得到了映射随电压反射系数变化的分岔图, 详细分析了系统随参数变化的动态演化过程. 结果表明在一定参数条件下, 该电磁系统中存在着分岔、混沌、周期吸引子共存、混沌吸引子共存以及周期与混沌吸引子共存等复杂的非线性动力学行为.

关键词: 约瑟夫森结电磁系统; Poincaré 映射; 分岔; 混沌; 吸引子共存

中图分类号: TM134, O511+.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2010) 06-1311-05

Bifurcation and Chaos in Josephson Junction Electromagnetic System with Lossless Transmission Line

ZHANG Li-sen, CAI Li, FENG Chao-wen

(School of Science, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710051, China)

Abstract: A one-dimensional Poincaré map for the forward traveling voltage wave at the left end of Josephson junction electromagnetic system with lossless transmission line is derived. The stability at fixed point of the map is analyzed based on nonlinear dynamics theory. The bifurcation diagrams with voltage reflex coefficient as parameter are obtained through numerical computation and the dynamic evolutive process of the system is analyzed in detail. Numerical results show that under certain parametric condition complex nonlinear dynamical behaviors exist in the electromagnetic system, such as bifurcation, chaos, coexisting periodic attractors, coexisting chaotic attractors, and coexisting periodic-chaotic attractors.

Key words: Josephson junction electromagnetic system; Poincaré map; bifurcation; chaos; coexisting attractors

1 引言

1962年,约瑟夫森(Josephson)研究了两块超导体被一层薄绝缘层分开的S-I-S结,从理论上预言:当绝缘层的厚度仅为几个纳米时,会有库柏对隧穿绝缘层势垒形成超导电流^[1].随后,Anderson和Rowell用实验证实了该现象的存在^[2].对Josephson结及相关电路的研究有着重要的理论和应用价值,因此引起了学者们的广泛关注^[3~8],并且形成了一门科学分支——超导电子学. Josephson结也是一种高度非线性器件,Josephson结相关电路系统中的非线性动力学特性受到了学者们的关注,并且他们对低维Josephson结电路系统中的混沌动力学行为的研究取得了很多有意义的成果^[3~6],其中所涉及到的Josephson结模型有电阻分路结(RSJ, Resistively-Shunted Junction)模型、电阻-电容分路结模型和电阻-电

容-电感分路结模型.

然而,随着电路工作频率的提高,特别是Josephson结经常工作于微波辐照(可以等效成高频的电流偏置)的环境中,电路中互连线的长度与传输电信号的波长相比已不能忽略,这时就需要将互连线看作是具有分布参数的传输结构处理,即将电路考虑成一个无穷维电磁系统.目前,对含传输线无穷维电磁系统特别是对系统中非线性现象的研究尚不多见,主要有以下几种:终端接二极管的传输线系统^[9]、时延蔡氏电路^[10]和时延范德波尔电磁系统^[11].本文针对一种含无损传输线的无穷维Josephson结电磁系统,经过严格地数学推导,得到了电磁系统左端点处电压正向行波分量的Poincaré映射,在此基础上详细分析了在不加直流偏置和加直流偏置两种情况下,该无穷维电磁系统中存在的复杂动力学行为.

2 含无损传输线约瑟夫森结电磁系统模型

对于超导微桥、超导点接触和小尺寸的隧道结,它们的等效电容很小以致可以忽略不计,此时一个实际的 Josephson 结可以等效为一个理想的 Josephson 结和一个电阻并联,这样的模型通常称为 RSJ 模型^[10],其等效电路如图 1(a)所示。

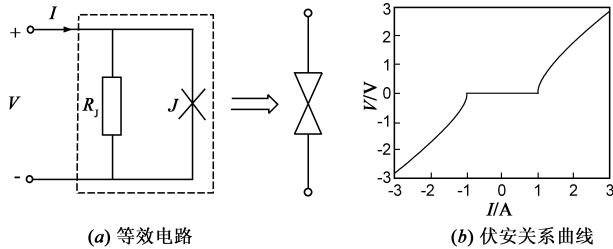


图1 RSJ模型的等效电路及伏安关系

对于 RSJ 模型, Josephson 结电压与结电流的关系存在解析解^[10]. 设 I_c 为隧道结的临界电流, 则当结电流 $|I| \leq I_c$ 时, $V = 0$; $I > I_c$ 时, $V = R_J I_c \sqrt{(I/I_c)^2 - 1}$; $I < -I_c$ 时, $V = -R_J I_c \sqrt{(I/I_c)^2 - 1}$. 作如下归一化处理: $I = I/I_c$, $V = V/R_J I_c$, 则在 RSJ 模型下, Josephson 结的伏安关系式如下:

$$V = g(I) = \begin{cases} \sqrt{I^2 - 1}, & I > 1 \\ 0, & -1 \leq I \leq 1 \\ -\sqrt{I^2 - 1}, & I < -1 \end{cases} \quad (1)$$

由上式可知, Josephson 结的伏安特性为一个分段非线性函数, 其伏安关系曲线如图 1(b)所示。

用一段无损均匀传输线将 Josephson 结与一个线性电阻并联, 得到含无损传输线的 Josephson 结无穷维电磁系统模型如图 2 所示。

Josephson 结独特的非线性伏安特性使系统产生复杂的动力学行为成为可能. 特别是当线性电阻 R 为负电阻时, 其放大作用结合 Josephson 结伏安曲线的弯折 $u^+(t) = f(u^+(t - T))$

$$= \begin{cases} \lambda \cdot \frac{-(R_c^2 + 1)u^+(t - T) - I_s + R_c \sqrt{(2u^+(t - T) + I_s)^2 + (1 - R_c^2)}}{R_c^2 - 1}, & u^+(t - T) > \frac{R_c - I_s}{2} \\ -\lambda u^+(t - T), & \frac{-R_c - I_s}{2} \leq u^+(t - T) \leq \frac{R_c - I_s}{2} \\ \lambda \cdot \frac{-(R_c^2 + 1)u^+(t - T) - I_s - R_c \sqrt{(2u^+(t - T) + I_s)^2 + (1 - R_c^2)}}{R_c^2 - 1}, & u^+(t - T) < \frac{-R_c - I_s}{2} \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\lambda = \frac{u^+(t)}{u^-(t)} = \frac{R - R_c}{R + R_c}$ 为左端点处电压的反射系数. 映射关系 $f(\cdot)$ 是一个分段非线性函数, 这源于 Josephson 结的分段非线性伏安关系. 从式(7)可以看出, 只要

作用, 很可能会引起电磁系统中出现各种复杂的非线性动力学现象。

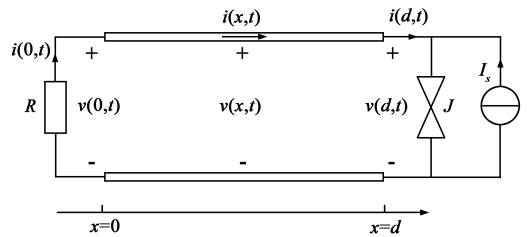


图2 含无损传输线 Josephson 结电磁系统模型

3 约瑟夫森结电磁系统的建模与分析

无损均匀传输线沿线电压、电流满足如下电报方程^[9]:

$$\begin{cases} -\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = L_0 \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \\ -\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = C_0 \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \end{cases} \quad (2)$$

其中, L_0 、 C_0 分别为传输线单位长度上的电感和电容, 且 $t \geq 0, 0 \leq x \leq d$. 根据行波理论, 电报方程(2)的解为

$$v(x, t) = u^+(t - x/c) + u^-(t + x/c) \quad (3)$$

$$i(x, t) = \frac{1}{R_c} [u^+(t - x/c) - u^-(t + x/c)] \quad (4)$$

其中 $u^+(t - x/c)$ 、 $u^-(t + x/c)$ 分别表示 t 时刻 x 处电压的正向行波分量和反向行波分量, $c = 1/\sqrt{L_0 C_0}$ 为传输线中波的传播速度, $R_c = \sqrt{L_0/C_0}$ 为传输线的特性阻抗。

根据图 2 可知, 电报方程(2)满足如下边界条件

$$v(x=0, t) = -Ri(x=0, t) \quad (5)$$

$$v(x=d, t) = g(i(x=d, t)) \quad (6)$$

其中 $g(\cdot)$ 函数的表达式如(1)式所示. 令 $T = 2d/c$ 为传输线上波的传播周期, 同时作变量代换: $t \rightarrow t + d/c$. 然后联立(3)、(4)、(5)和式(6), 经过推导, 可得含无损传输线 Josephson 结电磁系统左端点处 ($x=0$) 电压正向行波分量 $u^+(t)$ 满足如下延时方程

已知传输线左端点 $u^+(t)$ 在一个周期内的初值, 就可以求出 $u^+(t)$ 在任意 $t \geq 0$ 时刻的值。

为了方便分析传输线沿线电压的动力学行为, 基于延时方程式(7), 取离散时间间隔为传播周期 T , 令

$u_{n+1}^+ = u^+(t)$, $u_n^+ = u^+(t-T)$, 可进一步得到左端点处电压正向行波分量 $u^+(t)$ 的 Poincaré 映射为

$$u_{n+1}^+ = f(u_n^+) \quad (8)$$

其映射关系与式(7)在形式上相同。

4 偏置为零时系统的混沌动力学行为分析

4.1 定点及其稳定性

左端点处电压正向行波分量 $u^+(t)$ 的一维 Poincaré 映射关系曲线如图 3 所示。从图中可以看出,映射关系曲线具有奇对称性,这也是由 Josephson 结的伏安特性是奇函数所决定的。

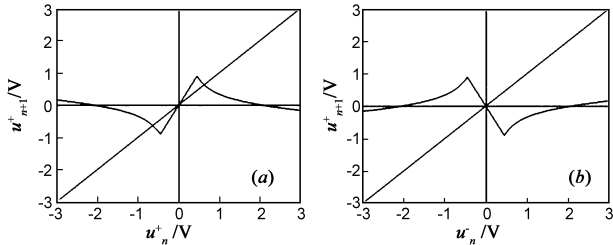


图3 一维Poincaré映射关系曲线 (a) $\lambda=-2$; (b) $\lambda=2$

通过式(8)并结合图 3,可以求得 Poincaré 映射的定点为:当 $\lambda > -1$ 时,仅有一个定点 $u_f^+ = 0$;当 $\lambda = -1$ 时,区间 $[-R_C/2, R_C/2]$ 中的点均为定点;当 $\lambda < -1$ 时,映射有三个定点,即 $u_{f1}^+ = 0$, $u_{f2}^+ = -u_{f3}^+ =$

$$\frac{-\lambda R_C}{\sqrt{(\lambda-1)^2 - R_C^2(\lambda+1)^2}}$$

为分析定点的稳定性,首先计算 $f'(u_n^+) = \frac{du_{n+1}^+}{du_n^+}$, 由式(7)、(8)得

$$f'(u_n^+) = \begin{cases} \frac{\lambda}{R_C^2 - 1} \left[-R_C^2 - 1 + \frac{2R_C(2u_n^+ + I_s)}{\sqrt{(2u_n^+ + I_s)^2 + (1 - R_C^2)}} \right], & u_n^+ > \frac{R_C - I_s}{2} \\ -\lambda, & -\frac{R_C - I_s}{2} \leq u_n^+ \leq \frac{R_C - I_s}{2} \\ \frac{\lambda}{R_C^2 - 1} \left[-R_C^2 - 1 - \frac{2R_C(2u_n^+ + I_s)}{\sqrt{(2u_n^+ + I_s)^2 + (1 - R_C^2)}} \right], & u_n^+ < -\frac{R_C - I_s}{2} \end{cases} \quad (9)$$

一维离散映射定点稳定性的判定条件为: $|f'(u_n^+)| < 1$. 利用该判据可计算得到左端点处电压正向行波分量 $u^+(t)$ 的一维 Poincaré 映射定点的稳定情况如下:

(1) $\lambda > 1$ 时,映射仅有一个定点 $u_f^+ = 0$, $f'(u_n^+) \big|_{u_f^+} < -1$, 不稳定结点;

(2) $\lambda = 1$ 时,映射仅有一个定点 $u_f^+ = 0$, $f'(u_n^+) \big|_{u_f^+} = -1$, 定点为中心(临界稳定);

(3) $-1 < \lambda < 1$ 时,映射仅有一个定点 $u_f^+ = 0$, $|f'(u_n^+) \big|_{u_f^+}| < 1$, 稳定结点;

(4) $\lambda = -1$ 时,映射有无穷多个定点,且均满足 $f'(u_n^+) \big|_{u_f^+} = 1$, 定点为中心(临界稳定);

(5) $\lambda < -1$ 时,映射有三个定点 $u_{f1}^+ = 0$, $u_{f2}^+ = -u_{f3}^+ = \frac{-\lambda R_C}{\sqrt{(\lambda-1)^2 - R_C^2(\lambda+1)^2}}$, 且均满足 $|f'(u_n^+) \big|_{u_f^+}| > 1$, 三个定点均为不稳定结点。

由以上分析可知,当 $\lambda = \pm 1$ 时,映射出现定点数目及稳定性的变化,因此映射在 $\lambda = \pm 1$ 处会发生分岔,下面将进一步分析这种情形。

4.2 映射中的分岔与混沌

为了验证上述分析结果,直观地展现电磁系统左端点处电压正向行波分量 $u^+(t)$ 的一维 Poincaré 映射随系统参数变化而出现分岔、混沌的动态演化过程。下面就以左端点处电压的反射系数 λ 为分岔参数,取 $R_C = 0.9\Omega$, 对映射方程式(8)进行迭代计算,去掉与初值有关的若干个迭代值,得到如图 4 所示的分岔图。

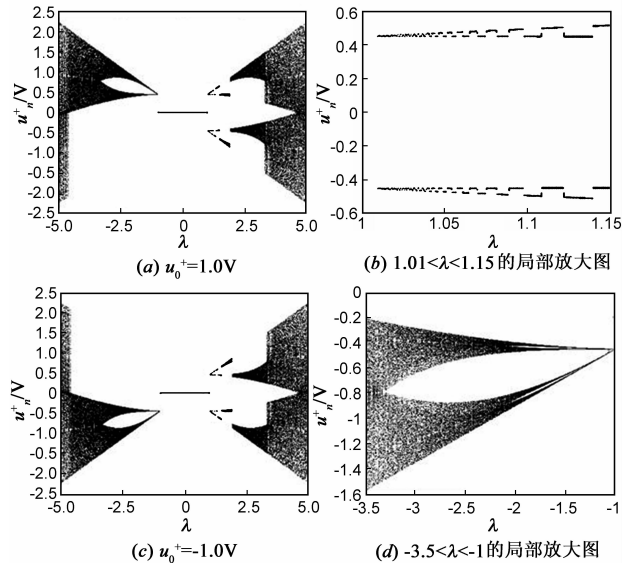


图4 一维Poincaré映射随 λ 变化的分岔图

图 4(a)、(c)分别为 u_n^+ 从不同初值出发得到的计算结果,(b)、(d)图分别为(a)、(c)图的局部放大图。从图中可以看出,当 $|\lambda| < 1$ 时, u_n^+ 从不同的初值出发均收敛到零状态,映射在 $\lambda = \pm 1$ 处开始分岔。这是因为 $|\lambda| < 1$ 时映射只有一个稳定结点 $u_f^+ = 0$, 而在 $\lambda = \pm 1$ 时映射定点的数目及稳定性发生变化,必然会导致系统在该点发生分岔,这与前面的分析是一致的。下面分别分析一维 Poincaré 映射在 $\lambda > 1$ 和 $\lambda < -1$ 时的动力学行为。

(1) 映射在 $\lambda > 1$ 时的动力学行为

从图 4(a)、(c) 中看到, 映射在 λ 略大于 1 后分岔曲线迅速分为两支. 在之后的一段较窄的区间内, 通过图 4(b) 所示的局部放大图, 可以看到映射运行在周期 2, 只是随着 λ 的变化, 吸引子的位置会出现小幅度地跳跃. 而且, 如果对图 4(c) 也作同样的放大, 还可以观察到映射此时实际上存在着周期 2 吸引子共存. 对照图 4(a)、(c), 随着 λ 的增大, 映射由周期 2 吸引子共存逐渐发展到二带混沌吸引子共存, 这种现象一直持续到 $\lambda \approx 3.38$. $3.38 < \lambda < 4.52$ 时, 吸引子共存现象消失, 映射运行在二带混沌区. $\lambda > 4.52$ 后, 二带混沌区与一带混沌区合并, 映射开始运行在一带混沌区.

(2) 映射在 $\lambda < -1$ 时的动力学行为

从图 4(a)、(c) 中看到, 在 $\lambda = -1$ 附近吸引子的位置发生跳跃, 且对于不同的初值, 跳跃的位置不同. 由图 4(d) 所示的局部放大图可知, 随着 λ 的减小, 映射依次由周期 2 吸引子共存过渡到周期 4 吸引子共存, 再逐渐发展到四带混沌吸引子共存, 然后再到二带混沌吸引子、一带混沌吸引子共存. 当 $\lambda < -4.69$ 时, 吸引子共存现象消失, 映射运行在一带混沌区.

5 偏置不为零时系统的混沌动力学特性

以上对不带偏置的含无损传输线 Josephson 结电磁系统中的分岔与混沌行为进行了分析. 而在一些应用中, 经常会给 Josephson 结加直流甚至是交流电流源偏置. 加直流电流源偏置后, 电磁系统原先的对称性将会被破坏, 系统也会出现一些新的动力学现象. 下面对这种不对称的含无损传输线 Josephson 结电磁系统的非线性动力学行为进行分析.

5.1 定点及其稳定性

加入直流偏置后, 映射定点的分布情况较为复杂, 在图 5 所示的映射关系曲线图中给出了其中的一种情况. 图 5 中选取的参数值为: $I_s = 0.4A$, $\lambda = \pm 2$, 其中 $\lambda = -2$ 时映射有三个定点, 计算得:

$$u_{\beta 1}^+ = 0,$$

$$u_{\beta 2}^+ =$$

$$\frac{\lambda(\lambda-1)I_s + \sqrt{\lambda^2(\lambda-1)^2 I_s^2 + \lambda^2(I_s^2 - R_C^2)[R_C^2(\lambda+1)^2 - (\lambda-1)^2]}}{R_C^2(\lambda+1)^2 - (\lambda-1)^2},$$

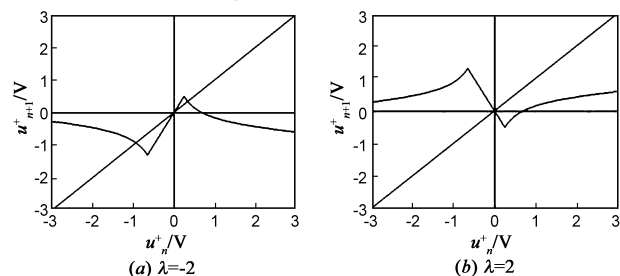


图 5 $I_s=0.4A$ 时一维 Poincaré 映射关系曲线

$$u_{\beta 3}^+ =$$

$$\frac{\lambda(\lambda-1)I_s - \sqrt{\lambda^2(\lambda-1)^2 I_s^2 + \lambda^2(I_s^2 - R_C^2)[R_C^2(\lambda+1)^2 - (\lambda-1)^2]}}{R_C^2(\lambda+1)^2 - (\lambda-1)^2},$$

分析知 $u_{\beta 1}^+$ 、 $u_{\beta 3}^+$ 不稳定, 而 $u_{\beta 2}^+$ 稳定. 由于此时三个定点的稳定性不同, 所以映射对初值非常敏感, 而且还会出现周期与混沌吸引子共存的现象.

5.2 分岔与混沌

带直流偏置的含无损传输线 Josephson 结电磁系统左端点处电压正向行波分量 $u^+(\lambda)$ 的 Poincaré 映射随系统参数变化的分岔图如图 6 所示.

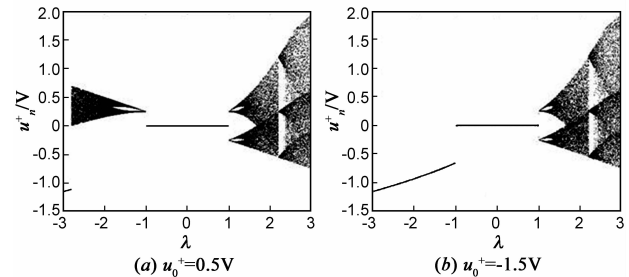


图 6 $I_s=0.4A$ 时一维 Poincaré 映射随 λ 变化的分岔图

对比图 6 和图 4 可以看到, 带直流偏置的电磁系统在 $\lambda > 1$ 时不再出现吸引子共存的现象, 而且其另一个显著特点是存在着周期与混沌吸引子共存的现象. 在 $\lambda < -1$ 后, 映射从不同初值出发的演化过程完全不同, 一种情况会继续保持着周期 1 状态, 另一种情况却是走向混沌的道路, 映射存在这种周期与混沌吸引子共存现象是由其定点的稳定性不一致所导致. 从稳定定点 $u_{\beta 2}^+$ 附近出发的点最终一定会收敛到 $u_{\beta 2}^+$, 即周期 1 状态; 而从不稳定定点 $u_{\beta 3}^+$ 附近出发的点, 如果不能收敛到稳定定点 $u_{\beta 2}^+$, 那么映射最终会运行在混沌状态. 另外, 在 $\lambda \approx -2.81$ 时, 映射由混沌状态突然进入到周期 1 状态, 即出现了所谓的“混沌危机”现象. 此后, 周期与混沌吸引子共存现象消失, 映射运行在稳定的周期 1 状态. 图 7 是计算得到的映射从不同初值出发的 Lyapunov 指数曲线, 与图 6 对照可知结果是一致的.

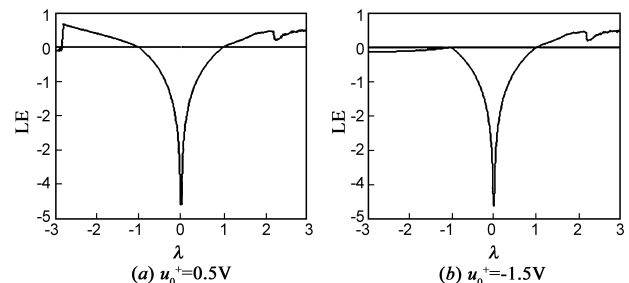


图 7 $I_s=0.4A$ 时映射的 Lyapunov 指数曲线

由以上分析可知, 无论偏置是否为零, 系统在 $|\lambda| > 1$ 时均会出现分岔、混沌现象. 但是在 $|\lambda| < 1$ 时, 系统一般都工作于平衡点, 因此如果要避免系统出现混

沌行为,则可将 λ 的值控制在 $(-1, 1)$ 之内.

6 结论

论文通过对含无损传输线的 Josephson 结电磁系统的建模与分析得知,在一定参数条件下,系统中存在着分岔、混沌以及多种吸引子共存等丰富的非线性动力学行为.在对称(不带直流偏置)的 Josephson 结电磁系统中,从不同初值出发,系统将会收敛到不同的吸引子,但共存吸引子的类型相同;在不对称(带直流电流源偏置)的 Josephson 结电磁系统中,由于定点稳定性的不一致,导致系统存在着不同类型吸引子共存的现象,即周期与混沌吸引子共存.而且在某些参数范围内,不对称系统中还会出现由于边界碰撞导致混沌吸引子的突然消失,即引发了所谓的混沌危机.本文分析了电阻分路的 Josephson 结电磁系统中的动力学行为.基于其他模型的 Josephson 结电磁系统,特别是传输线沿线的时空行为,还有待进一步研究.

参考文献:

- [1] B D Josephson. Probable new effects in superconductive tunneling[J]. Phys Lett, 1962, 1: 251 - 253.
- [2] P W Anderson, J M Rowell. Probable observation of the Josephson superconducting tunneling effect[J]. Phys Rev Lett, 1963, 10(6): 230 - 232.
- [3] B A Huberman, et al. Noise phenomena in Josephson junction [J]. Appl Phys Lett, 1980, 37: 750 - 752.
- [4] A B Cawthorne, C B Whan, C J Lobb. Complex dynamics of resistively and inductively shunted Josephson junction[J]. J Appl Phys, 1998, 84(2): 1126 - 1132.
- [5] S K Dana, D C Sengupta, K D Edoh. Chaotic dynamics in Josephson junction[J]. IEEE Trans Circ Syst I, 2001, 48(8): 990 - 996.
- [6] X S Yang, Q D Li. A computer-assisted proof of chaos in Josephson junctions[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2006, 27: 25 - 30.
- [7] 王颖, 许伟伟, 孙国柱, 等. 约瑟夫森结跳变电流统计分布测量系统[J]. 电子学报, 2007, 35(5): 823 - 826.
Wang Ying, et al. The measurement system of statistical distri-

bution of the switching current of a single Josephson junction [J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(5): 823 - 826. (in Chinese)

- [8] 刘飞连, 周铁戈, 等. 约瑟夫森结参数对 Shapiro 台阶的影响研究[J]. 电子学报, 2009, 37(5): 957 - 960.
Liu Fei-lian, et al. Influence of Josephson junction parameters on Shapiro steps[J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(5): 957 - 960. (in Chinese)
- [9] L Corti, L De Menna, G Miano, et al. Chaotic dynamics in an infinite-dimensional electromagnetic system [J]. IEEE Trans Circ Syst I, 1994, 41(11): 730 - 736.
- [10] A N Skarkovsky. Chaos from a time-delayed Chua's circuit [J]. IEEE Trans Circ Syst I, 1993, 40(10): 781 - 783.
- [11] 马西奎, 杨梅, 邹建龙, 等. 一种时延范德波尔电磁系统中的复杂行为(I) - 分岔与混沌现象[J]. 物理学报, 2006, 55(11): 5648 - 5656.
Ma Xi-kui, et al. Study of complex behavior in a time - delayed van der pol's electromagnetic system(I) - The phenomena of bifurcations and chaos[J]. Acta Physica Sinica, 2006, 55(11): 5648 - 5656. (in Chinese)
- [12] 高斌. 超导约瑟夫森结阵列振荡器研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2003.
Gao Bin. Research on Superconducting Josephson Junction array[D]. Xi'an, Shaanxi: Xidian University, 2003. (in Chinese)

作者简介:



张立森 男, 1982 年生于湖北鄂州, 空军工程大学博士生, 研究方向为非线性电路与系统的理论及应用.

E-mail: ls.zhang@yahoo.com.cn

蔡理 女, 1959 年生于福建永春, 空军工程大学教授, 博士生导师, 主要从事单电子纳器件的理论及应用、集成滤波器设计、现代集成电路与系统理论的研究.

冯朝文 男, 1983 年生于山西运城, 空军工程大学博士生, 研究方向为单电子纳器件理论及应用.

